Δεύτερο διαγώνισμα στις καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

Θέμα 1

Θεωρούμε την καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $c(t) = \big(1 + \cos t, t, \sin t\big),\ t \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω καμπύλη είναι κανονική.

(ii) Να βρείτε το σημείο τομής της εφαπτομένης της καμπύλης c με το επίπεδο $z = 1$ στο σημείο αυτής που αντιστοιχεί στο $t = 2\pi$.

(iii) Να αναπαραμετρήσετε τη c ως προς το μήκος τόξου ς.

(iv) Να βρείτε το πλαίσιο Frenet της c ως προς την παράμετρο t.

(v) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω καμπύλη είναι σταθεράς κλίσης και να βρείτε το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w}$ το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με κάθε εφαπτόμενη της εν λόγω καμπύλης.

(vi) Ποια η εικόνα της καμπύλης c;

Θέμα 2

Έστω καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καπυλότητα $k(s) > 0,\ \forall s \in I$ και στρέψη $\tau(s)$. Θεωρούμε την καμπύλη $\bar{c}(s) := t(s),\ s \in I$, όπου $t(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της c.

(i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη $\bar{c}$ είναι κανονική και σφαιρική.

(ii) Αν $\bar{s}$ η συνάρτηση μήκους τόξου της $\bar{c}$ (με αφετηρία ένα κατάλληλο σημείο t_0), να αποδείξετε ότι $\dfrac{d\bar{s}}{ds}(s) = k(s),\ \forall s \in I$.

(iii) Να υπολογίσετε την καμπυλότητα και την στρέψη της καμπύλης $\bar{c}$.

(iv) Να αποδείξετε ότι η $\bar{c}$ είναι τόξο κύλου **αν και μόνο αν** η καμπύλη c είναι σταθερής κλίσης.

Θέμα 3

Έστω καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο, καπυλότητα $k(s) > 0,\ \forall s \in I$ και στρέψη $\tau(s)$. Αν οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $c(s)$ και είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{n} + \vec{b}$, τέμνονται για κάθε $s \in I$ σε σταθερό σημείο p_0, να αποδείξετε ότι η καμπύλη c είναι κύκλος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ